SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

École Supérieure de Commerce de Paris 1983

Mathématiques I

OPTION GENERALE

Pour tout entier naturel n on désigne par N_n l'ensemble des entiers naturels au plus égaux à n et, pour $n \geqslant 1$, par N_n^* l'ensemble des entiers naturels non nuls au plus égaux à n .

Dans ce problème on appelle fraction continue limitée toute fraction du type :

$$f = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots \; \ddots \; a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

dans laquelle $a_0 \in N$ et pour tout $j \in N_n^*$, a_j et b_j sont des entiers naturels non nuls et sans diviseur commun.
Une telle fraction est notée :

$$f = \left[a_0 ; \frac{b_j}{a_j} \right]_1^n ,$$

et pour tout $k \in N_n^*$ la fraction :

$$f_k = \left[a_0 ; \frac{b_j}{a_j} \right]_1^k$$

est appelée kième fraction correspondante de f .

On rappelle que : si a et b sont des entiers naturels et si b est différent de zéro, le quotient et le reste dans la division de a par b sont les entiers naturels a_0 et r_1 définis par : $a = a_0 b + r_1$ et $r_1 < b$.

PARTIE 1

Soit $f = \left[a_0 ; \frac{b_j}{a_j} \right]_1^n$ une fraction continue limitée donnée.

On pose $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$, $P_0 = a_0$, $Q_0 = 1$ et pour tout $k \in N_n^*$ les entiers P_k et Q_k définis par la fraction irréductible $f_k = \frac{P_k}{Q_k}$.

1°/ Démontrer que les nombres P_k et Q_k satisfont pour tout $k \in N_n^*$ aux relations :

$$\begin{cases} P_k = a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2} \\ Q_k = a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2} \end{cases}$$

2°/ Soit, pour $k \in N_n$, le déterminant : $S_k = \begin{vmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{vmatrix}$

a) exprimer S_k en fonction de b_k et S_{k-1}

b) en déduire que : $\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{A_k}{Q_k Q_{k-1}}$ pour $k \geqslant 1$ où A_k est un entier relatif que l'on exprimera en fonction de k, b_1 , b_2 , ... , b_k .

3°/ Soit, pour $k \in N_n^*$, le déterminant : $T_k = \begin{vmatrix} P_k & P_{k-2} \\ Q_k & Q_{k-2} \end{vmatrix}$

a) exprimer T_k en fonction de a_k et S_{k-1} ; en déduire que pour $k \geqslant 3$ $T_k = B_k T_{k-2}$ où B_k est un nombre rationnel dont on donnera la valeur.

b) calculer T_1 et T_2 ; quel est le signe de T_k ?

4°/ On considère la suite finie de terme général f_k avec $k \in N_n^*$

a) montrer que chacune des deux sous-suites (f_{2j}) et (f_{2j+1}) est monotone, que l'une est croissante et l'autre décroissante.

b) comparer f_{2j-1} et f_{2j} $(0 \leqslant 2j-1 \ , \ 2j \leqslant n)$; en déduire que, quels que soient les entiers non nuls 2i-1 et 2j , $f_{2j} < f_{2i-1}$; puis que :

$$f_{2j-2} < f_{2j} \leqslant f \leqslant f_{2j+1} < f_{2j-1} \quad \text{pour } (0 < 2j-2, 2j+1 \leqslant n).$$

Dans quel(s) cas y a-t-il égalité ?

c) montrer que, pour tout $k \in N_n^*$, $|f - f_k| \leqslant \frac{b_1 b_2 \ldots b_k}{Q_{k-1} Q_k}$

5°/ Toute fraction continue limitée f est un nombre rationnel strictement positif. Réciproquement, montrer que tout nombre rationnel non entier p/q, où p et q sont des entiers naturels strictement positifs sans diviseur commun, est égal à une fraction continue limitée du type :

$$\left[a_0 ; \frac{1}{a_j} \right]_1^n .$$

. . . / . . .

PARTIE II

On conserve pour les fractions continues limitées les notations de la partie I.

On considère deux suites infinies de termes généraux a_n et b_n telles que :

$a_0 \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n et b_n sont deux entiers naturels non nuls et sans diviseur commun.

Soit la suite de terme général $f_n = \left[a_0 ; \frac{b_j}{a_j}\right]_1^n$; on dit que la fraction continue illimitée : $\left[a_0 ; \frac{b_j}{a_j}\right]_1^\infty$ est convergente et que sa valeur est f si la suite de terme général f_n est convergente et de limite f.

On pose alors: $f = \left[a_0 ; \frac{b_j}{a_j}\right]_1^\infty = \lim_{n \to +\infty} \left[a_0 ; \frac{b_j}{a_j}\right]_1^n$

1°/ Montrer que la fraction continue illimitée $\left[a_0 ; \frac{b_j}{a_j}\right]_1^\infty$ est convergente

si $\lim_{n \to +\infty} \frac{b_1 b_2 \ldots b_n}{Q_{n-1} Q_n} = 0$

2°/ On suppose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k \geq b_k$ et $a_k \geq d > 0$, où d est un nombre donné;

a) démontrer que $b_{k+1} \cdot \frac{Q_{k-1}}{Q_{k+1}} \leq \frac{1}{1+d}$

b) en déduire que $\frac{b_1 b_2 \ldots b_k}{Q_{k-1} Q_k} \leq \left(\frac{1}{1+d}\right)^{k-1}$

c) la fraction continue illimitée $\left[a_0 ; \frac{b_j}{a_j}\right]_1^\infty$ est-elle convergente ?

3°/ On pose $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que $\forall n$, $b_n = 1$;

a) démontrer que: $Q_n \geq Q_{n-1}$ et $Q_n \geq 2Q_{n-2}$

b) en déduire que, pour $n \geq 1$, $Q_n Q_{n-1} \geq 2^{n-1}$

c) montrer que toute fraction continue illimitée du type : $\left[a_0 ; \frac{1}{a_j}\right]_1^\infty$ est convergente et est égale à un nombre irrationnel; étudier la réciproque.
